অধ্যায় ১৬

পরিমিতি (Mensuration)

ব্যবহারিক প্রয়োজনে রেখার দৈর্ঘ্য, তলের ক্ষেত্রফল, ঘনবস্তুর আয়তন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়। এ রকম যেকোনো রাশি পরিমাপের ক্ষেত্রে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাণের একটি রাশিকে একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। পরিমাপকৃত রাশি এবং এরূপ নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে।

অর্থাৎ পরিমাপ $= \dfrac{\text{পরিমাপকৃত রাশি}}{\text{একক রাশি}}$

নির্ধারিত একক সম্পর্কে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটির একক রাশির কতগুণ তা নির্দেশ করে। যেমন, বেঞ্চটি 5 মিটার লম্বা। এখানে মিটার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যাকে একক হিসেবে ধরা হয়েছে এবং যার তুলনায় বেঞ্চটি 5 গুণ লম্বা।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

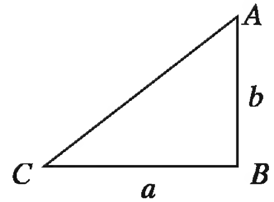
- ত্রিভুজক্ষেত্র ও চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র প্রয়োগ করে বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং এতদসম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- বৃত্তের পরিধি ও বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- বৃত্তক্ষেত্র ও তার অংশবিশেষের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে এতদ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তু, ঘনক ও বেলনের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে এবং এ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- সুষম ও যৌগিক ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

পূর্বের শ্রেণিতে আমরা জেনেছি, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

১. **সমকোণী ত্রিভুজ:** মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে $BC = a$ এবং $AB = b$। BC কে ভূমি এবং AB কে উচ্চতা বিবেচনা করলে,

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2}ab$



২. **ত্রিভুজক্ষেত্রের দুই বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে:** মনে করি, ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয় $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$। A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব আঁকি। ধরি, উচ্চতা $AD = h$।

কোণ C বিবেচনা করলে পাই, $\frac{AD}{CA} = \sin C$

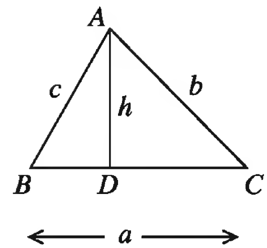
বা, $\frac{h}{b} = \sin C$ বা, $h = b\sin C$

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}BC \times AD$

$= \frac{1}{2}a \times b\sin C = \frac{1}{2}ab\sin C$

অনুরূপভাবে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$



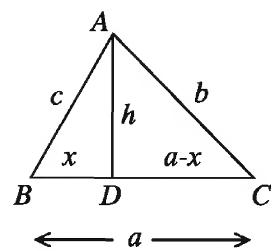
৩. **ত্রিভুজের তিন বাহু দেওয়া আছে:**

মনে করি, $\triangle ABC$ এর $BC = a,\ CA = b$ এবং $AB = c$। এর পরিসীমা $2s = a + b + c$।

$AD \perp BC$ আঁকি।

ধরি, $BD = x$ তাহলে, $CD = a - x$

$\triangle ABD$ এবং $\triangle ACD$ সমকোণী।



$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$ এবং $AD^2 = AC^2 - CD^2$

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$

বা, $2ax = c^2 + a^2 - b^2$

$\therefore x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$

২০১৮

আবার,

$$
\begin{aligned}
AD^2 &= c^2 - x^2 \\
&= c^2 - \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2 \\
&= \left(c + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right) \\
&= \frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2a} \cdot \frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2a} \\
&= \frac{\{(c+a)^2-b^2\}\{b^2-(c-a)^2\}}{4a^2} \\
&= \frac{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)}{4a^2} \\
&= \frac{2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)}{4a^2} \\
&= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}
\end{aligned}
$$

$$\therefore AD = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$\therefore \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

৪. **সমবাহু ত্রিভুজ:** মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a

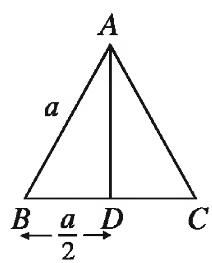
$AD \perp BC$ আঁকি। $\therefore BD = CD = \dfrac{a}{2}$

$\triangle ABD$ সমকোণী।

$\therefore BD^2 + AD^2 = AB^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$

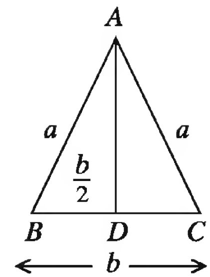
$\therefore AD = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$



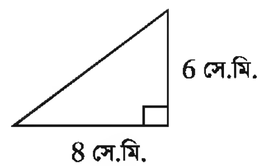
$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

২০১৮

৫. **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ:** মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের
$AB = AC = a$ এবং $BC = b$
$AD \perp BC$ আঁকি। $\therefore BD = CD = \frac{b}{2}$
$\triangle ABD$ সমকোণী।
$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$
$= a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{4a^2 - b^2}{4}$
$\therefore AD = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$
সমদ্বিবাহু $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD$
$= \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

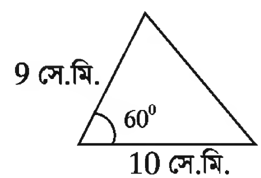


উদাহরণ ১. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 8 সে.মি. হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান: মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে $a = 6$ সে.মি. এবং $b = 8$ সে.মি.।
$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 6 \times 8$ বর্গ সে.মি. $= 24$ বর্গ সে.মি.।

উদাহরণ ২. কোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথক্রমে 9 সে.মি. ও 10 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

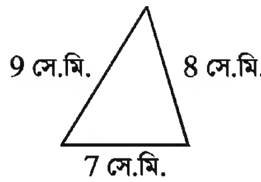


সমাধান: মনে করি, ত্রিভুজের বাহুদ্বয় যথাক্রমে $a = 9$ সে.মি. ও $b = 10$ সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\theta = 60°$।
$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab\sin 60°$
$= \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ বর্গ সে.মি. $= 38.97$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 38.97 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ ৩. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে.মি., 8 সে.মি. ও 9 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ত্রিভুজটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a = 7$ সে.মি., $b = 8$ সে.মি. ও $c = 9$ সে.মি.।

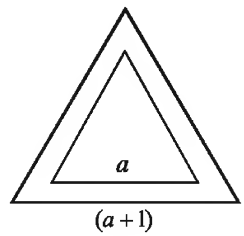
অর্ধপরিসীমা $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{7+8+9}{2}$ সে.মি. $= 12$ সে.মি.



$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$= \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$ বর্গ সে.মি.
$= \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3}$ বর্গ সে.মি.
$= \sqrt{720} = 26.83$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)
$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 26.83 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ ৪. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল $3\sqrt{3}$ বর্গমিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:
মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a মিটার।



$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গমিটার।
ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার বাড়ালে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল
$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}(a+1)^2$ বর্গমিটার।

প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a+1)^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\sqrt{3}$

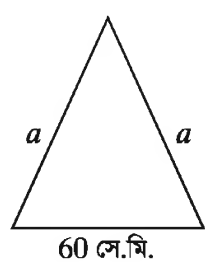
বা, $(a+1)^2 - a^2 = 12$ $\quad \left[\dfrac{\sqrt{3}}{4} \text{ দ্বারা ভাগ করে}\right]$

বা, $a^2 + 2a + 1 - a^2 = 12$ বা, $2a = 11$ বা, $a = 5.5$

নির্ণেয় বাহুর দৈর্ঘ্য 5.5 মিটার।

উদাহরণ ৫. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 60 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল 1200 বর্গ সে.মি. হলে সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি $b = 60$ সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য a।
ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$



প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = 1200$
বা, $\dfrac{60}{4}\sqrt{4a^2 - (60)^2} = 1200$
বা, $15\sqrt{4a^2 - 3600} = 1200$
বা, $\sqrt{4a^2 - 3600} = 80$

বা, $4a^2 - 3600 = 6400$ $\quad$ [বর্গ করে]

বা, $4a^2 = 10000$

২০১৮

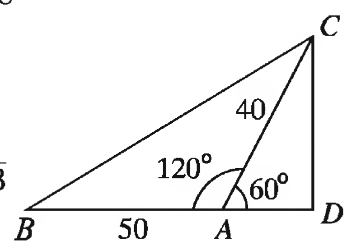
বা, $a^2 = 2500$

$\therefore a = 50$

ত্রিভুজটির সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 50 সে.মি.।

উদাহরণ ৬. একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা $120°$ কোণে চলে গেছে। দুই জন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ও 8 ঘণ্টায় কিলোমিটার বেগে বিপরীত দিকে রওনা হলো। 5 ঘণ্টা পরে তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, A স্থান থেকে দুইজন লোক যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে রওনা হয়ে 5 ঘণ্টা পর যথাক্রমে B ও C স্থাণে পৌঁছালো। তাহলে, 5 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব হবে BC। C থেকে BA এর বর্ধিতাংশের উপর CD লম্ব টানি।



$\therefore AB = 5 \times 10$ কিলোমিটার $= 50$ কিলোমিটার, $AC = 5 \times 8$ কিলোমিটার $= 40$ কিলোমিটার এবং $\angle BAC = 120°$

$\therefore \angle DAC = 180° - 120° = 60°$

$\triangle ACD$ সমকোণী।

$\therefore \dfrac{CD}{AC} = \sin 60°$ বা, $CD = AC\sin 60° = 40 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

এবং $\dfrac{AD}{AC} = \cos 60°$ বা, $AD = AC\cos 60° = 40 \times \dfrac{1}{2} = 20$

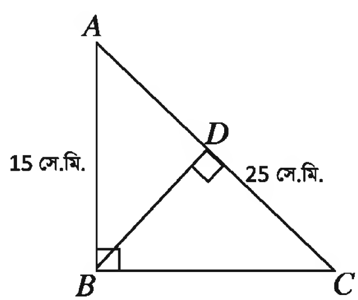
আবার, সমকোণী ত্রিভুজ BCD থেকে পাই,

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = (BA + AD)^2 + CD^2$$
$$= (50 + 20)^2 + (20\sqrt{3})^2 = 4900 + 1200 = 6100$$

$\therefore BC = 78.1$ (প্রায়)

নির্ণেয় দূরত্ব 78.1 কিলোমিটার (প্রায়)

উদাহরণ ৭. প্রদত্ত চিত্রের আলোকে



ক) BC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ) BD এর মান নির্ণয় কর।

গ) $\triangle ABD$ ও $\triangle BCD$ এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $AB = 15,\ AC = 25$

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(25)^{-}(15)^2} = \sqrt{400} = 20$$

২০১৮

খ) $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}BC \cdot AB = \frac{1}{2}AC \cdot BD$

$$\frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}BC \cdot AB$$

$$\therefore 25 \times BD = 20 \times 15$$

$$\therefore BD = 12$$

গ) $\triangle ABD$ সমকোণী থেকে পাই

$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$

বা, $AD^2 + 12^2 = 15^2$

বা, $AD^2 = 225 - 144 = 81$

$\therefore AD = 9$ এবং $CD = AC - AD = 25 - 9 = 16$

অতএব, $\triangle ABD$ ও $\triangle BCD$ এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত,

$$\frac{\triangle ABD}{\triangle BCD} = \frac{\frac{1}{2}BD \cdot AD}{\frac{1}{2}BD \cdot CD} = \frac{9}{16}$$

$$\triangle ABD : \triangle BCD = 9 : 16$$

অনুশীলনী ১৬.১

১. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 25 মিটার। এর একটি বাহু অপরটির $\frac{3}{4}$ অংশ হলে, বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২. 20 মিটার লম্বা একটি মই দেওয়ালের সাথে খাড়া ভাবে আছে। মইটির গোড়া দেওয়াল থেকে কত দূরে সরালে ওপরের প্রান্ত 4 মিটার নিচে নামবে।

৩. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 16 মিটার। এর সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য ভূমির $\frac{5}{6}$ অংশ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৪. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 25 সে.মি, 27 সে.মি. এবং পরিসীমা 84 সে.মি.। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে এর ক্ষেত্রফল $6\sqrt{3}$ বর্গমিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬. একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 26 মিটার, 28 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 182 বর্গমিটার হলে, বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

৭. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৮. একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা পরস্পর $135°$ কোণ করে দুই দিকে চলে গেছে। দুই জন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে বিপরীত মুখে রওনা হলো। 4 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব নির্ণয় কর।

৯. একটি সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু থেকে তিনটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি., 7 সে.মি. ও 8 সে.মি.। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১০. একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ভূমির $\frac{11}{12}$ অংশ থেকে 6 সে.মি. কম এবং অতিভুজ ভূমির $\frac{4}{3}$ অংশ থেকে 3 সে.মি. কম।

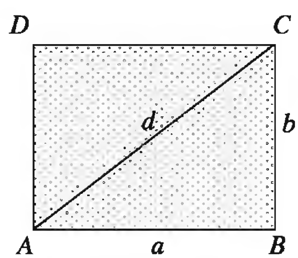
ক) ভূমি x হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ) ত্রিভুজটির ভূমি 12 সে.মি. হলে এর পরিসীমার সমান পরিসীমাবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

১. **আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:** মনে করি, $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $AB = a$, প্রস্থ $BC = b$ এবং কর্ণ $AC = d$



আমরা জানি, আয়তক্ষেত্রের কর্ণ আয়তক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

আয়তক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

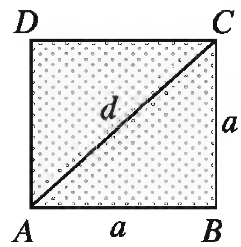
$= 2 \times \frac{1}{2} a \cdot b = ab$

লক্ষ করি, আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা $s = 2(a+b)$ এবং ABC ত্রিভুজটি সমকোণী।

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$ বা, $d^2 = a^2 + b^2$

$\therefore d = \sqrt{a^2 + b^2}$

২. **বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:** মনে করি, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং কর্ণ d



AC কর্ণ বর্গক্ষেত্রক্ষত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = $2 \times \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

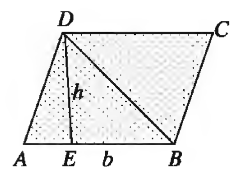
$= 2 \times \frac{1}{2}a \cdot a = a^2 = (\text{বাহুর দৈর্ঘ্য})^2$

লক্ষ করি, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $s = 4a$ এবং

কর্ণ $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$

৩. **সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:**

ক) ভূমি ও উচ্চতা দেওয়া আছে:

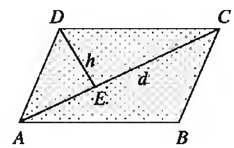


মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকক্ষেত্রের ভূমি $AB = b$ এবং উচ্চতা $DE = h$ । BD কর্ণ সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{1}{2}b \cdot h = bh$

খ) একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং ঐ কর্ণের বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে:

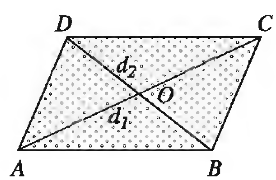


মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণ $AC = d$ এবং এর বিপরীত কৌণিক বিন্দু D থেকে AC এর উপর অঙ্কিত লম্ব $DE = h$। কর্ণ AC সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \triangle ACD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{1}{2}d \cdot h = dh$

৪. **রম্বসের ক্ষেত্রফল:** রম্বসের দুইটি কর্ণ দেওয়া আছে। মনে করি, $ABCD$ রম্বসের কর্ণ $AC = d_1$, কর্ণ $BD = d_2$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।



কর্ণ AC রম্বসক্ষেত্রটিকে সমান দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে। আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে

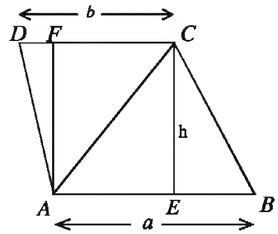
$\therefore \triangle ACD$ এর উচ্চতা $= \frac{d_2}{2}$

$\therefore$ রম্বস $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \triangle ACD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{1}{2}d_1 d_2$

২০১৮

৫. **ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:** ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের সমান্তরাল দুইটি বাহু এবং এদের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব দেওয়া আছে। মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $AB = a$ একক, $CD = b$ একক এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $CE = AF = h$। কর্ণ AC ট্রাপিজিয়াম $ABCD$ ক্ষেত্রটিকে $\triangle ABC$ ও $\triangle ACD$ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।



ট্রাপিজিয়াম $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $+ \triangle\ ACD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}AB \times CE + \frac{1}{2}CD \times AF$

$= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{h(a+b)}{2}$

উদাহরণ ৮. একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের $\frac{3}{2}$ গুণ। এর ক্ষেত্রফল 384 বর্গমিটার হলে, পরিসীমা ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তাকার ঘরের প্রস্থ x মিটার।

$\therefore$ ঘরের দৈর্ঘ্য $\frac{3}{2}x$ এবং ক্ষেত্রফল $\frac{3}{2}x \times x = \frac{3}{2}x^2$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{3}{2}x^2 = 384$ বা, $3x^2 = 768$ বা, $x^2 = 256$

$\therefore x = 16$ মিটার।

আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য $= \frac{3}{2} \times 16 = 24$ মিটার এবং প্রস্থ $= 16$ মিটার।

$\therefore$ ঘরটির পরিসীমা $= 2(24+16)$ মিটার $= 80$ মিটার এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{24^2+16^2}$ মিটার $= \sqrt{832}$ মিটার $= 28.84$ মিটার (প্রায়)

নির্ণেয় পরিসীমা 80 মিটার এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 28.84 মিটার (প্রায়)

উদাহরণ ৯. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2000 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য মিটার 10 কম হত তাহলে এটি একটি বর্গক্ষেত্র হত। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার।

প্রশ্নানুসারে, $xy = 2000 \ldots (1)$ এবং $x - 10 = y \ldots (2)$

সমীকরণ (1) এ $y = x - 10$ বসিয়ে পাই

$x(x-10) = 2000$ বা, $x^2 - 10x - 2000 = 0$

বা, $x^2 - 50x + 40x - 2000 = 0$ বা, $(x-50)(x+40) = 0$

$\therefore x = 50$ অথবা $x = -40$

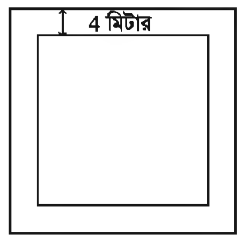
কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore x = 50$

এখন, সমীকরণ (2) এ x এর মান বসিয়ে পাই, $y = 50 - 10 = 40$

আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 50 মিটার এবং প্রস্থ 40 মিটার।

উদাহরণ ১০. বর্গাকার একটি মাঠের ভিতরে চারদিকে 4 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। যদি রাস্তার ক্ষেত্রফল 1 হেক্টর হয়, তবে রাস্তা বাদে মাঠের ভিতরের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য x মিটার।



$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল x^2 বর্গমিটার।
মাঠের ভিতরে চারদিকে 4 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে।
রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের দৈর্ঘ্য $= (x - 2 \times 4)$ বা, $(x - 8)$ মিটার।
রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল $= (x - 8)^2$ বর্গমিটার
সুতরাং রাস্তার ক্ষেত্রফল $= x^2 - (x - 8)^2$ বর্গমিটার
আমরা জানি, 1 হেক্টর = 10000 বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $x^2 - (x - 8)^2 = 10000$

বা, $x^2 - x^2 + 16x - 64 = 10000$

বা, $16x = 10064$

$\therefore x = 629$

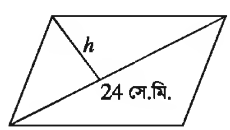
রাস্তা বাদে বর্গাকার মাঠের ক্ষেত্রফল

$= (629 - 8)^2$ বর্গমিটার $= 385641$ বর্গমিটার $= 38.56$ হেক্টর (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 38.56$ হেক্টর (প্রায়)।

উদাহরণ ১১. একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 120 বর্গ সে.মি. এবং একটি কর্ণ 24 সে.মি.। কর্ণটির বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

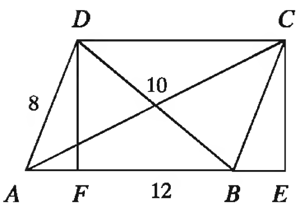
সমাধান: মনে করি, সামান্তরিকক্ষেত্রের একটি কর্ণ $d = 24$ সে. মি. এবং এর বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য h সে.মি.।



$\therefore$ সামান্তরিকক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= dh$ বর্গ সে.মি.
প্রশ্নানুসারে, $dh = 120$ বা, $h = \dfrac{120}{d} = \dfrac{120}{24} = 5$
নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

উদাহরণ ১২. একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 12 মিটার ও 8 মিটার এবং ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 10 মিটার হলে, অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকের $AB = a = 12$ মিটার, $AD = c = 8$ মিটার এবং কর্ণ $BD = b = 10$ মিটার। D ও C থেকে AB এর উপর এবং AB এর বর্ধিতাংশের উপর DF ও CE লম্ব টানি। A, C ও B, D যোগ করি।

$\triangle ABD$ এর অর্ধপরিসীমা $s = \dfrac{12+10+8}{2}$ মিটার $= 15$ মিটার

$\therefore \triangle ABD$ এর ক্ষেত্রফল $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{15(15-12)(15-10)(15-8)}$ বর্গমিটার $= \sqrt{15 \times 3 \times 5 \times 7}$ বর্গমিটার $= \sqrt{1575}$ বর্গমিটার $= 39.68$ বর্গমিটার (প্রায়)

আবার, $\triangle$ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} AB \times DF$

বা, $39.68 = \dfrac{1}{2} \times 12 \times DF$ বা, $6DF = 39.68$ $\therefore DF = 6.61$ (প্রায়)

এখন, $\triangle BCE$ সমকোণী।

$\therefore BE^2 = BC^2 - CE^2 = AD^2 - DF^2 = 8^2 - (6.61)^2 = 20.31$

$\therefore BE = 4.5$ (প্রায়)

অতএব, $AE = AB + BE = 12 + 4.5 = 16.5$ (প্রায়)

$\triangle ACE$ সমকোণী থেকে পাই

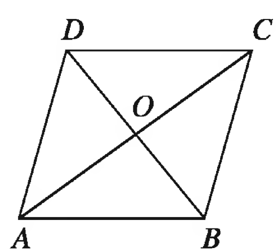
$\therefore AC^2 = AE^2 + CE^2 = (16.5)^2 + (6.61)^2 = 315.94$

$\therefore AC = 17.77$ (প্রায়)

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 17.77 মিটার (প্রায়)

উদাহরণ ১৩. একটি রম্বসের একটি কর্ণ 10 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 120 বর্গমিটার হলে, অপর কর্ণ এবং পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, $ABCD$ রম্বসের কর্ণ $BD = d_1 = 10$ মিটার এবং অপর কর্ণ d_2 মিটার।

রম্বসটির ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} d_1 d_2$ বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{1}{2} d_1 d_2 = 120$ বা, $d_2 = \dfrac{120 \times 2}{10} = 24$ মিটার।

আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore OD = OB = \dfrac{10}{2}$ মিটার $= 5$ মিটার এবং $OA = OC = \dfrac{24}{2}$ মিটার $= 12$ মিটার

$\triangle AOD$ সমকোণী ত্রিভুজে

$AD^2 = OA^2 + OD^2 = 12^2 + 5^2$

$\therefore AD = 13$

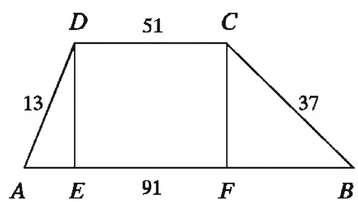
$\therefore$ রম্বসের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 13 মিটার।

রম্বসের পরিসীমা $= 4 \times 13$ মিটার $= 52$ মিটার

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 24 মিটার এবং পরিসীমা 52 মিটার।

উদাহরণ ১৪. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথক্রমে 91 সে.মি. ও 51 সে.মি. এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 37 সে.মি. ও 13 সে.মি.। ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:



মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামের $AB = 91$ সে.মি. $CD = 51$ সে.মি. থেকে। D ও C থেকে AB এর উপর যথাক্রমে DE ও CF লম্ব টানি।

$\therefore$ $CDEF$ একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore$ $EF = CD = 51$ সে.মি.।

ধরি, $AE = x$ এবং $DE = CF = h$

$\therefore$ $BF = AB - AF = 91 - (AE + EF) = 91 - (x + 51) = 40 - x$

সমকোণী $\triangle ADE$ থেকে পাই,

$AE^2 + DE^2 = AD^2$ বা, $x^2 + h^2 = 13^2$ বা, $x^2 + h^2 = 169 \ldots (1)$

আবার সমকোণী ত্রিভুজ BCF এর ক্ষেত্রে

$BF^2 + CF^2 = BC^2$ বা, $(40 - x)^2 + h^2 = 37^2$

বা, $1600 - 80x + x^2 + h^2 = 1369$

বা, $1600 - 80x + 169 = 1369$ [(1) এর সাহায্যে]

বা, $1600 + 169 - 1369 = 80x$

বা, $80x = 400$ $\therefore$ $x = 5$

সমীকরণ (1) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$5^2 + h^2 = 169$ বা, $h^2 = 169 - 25 = 144$ $\therefore h = 12$

ট্রাপিজিয়াম $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$

$= \dfrac{1}{2}(91 + 51) \times 12$ বর্গ সে.মি. $= 71 \times 12$ বর্গ সে.মি. $= 852$ বর্গ সে.মি.

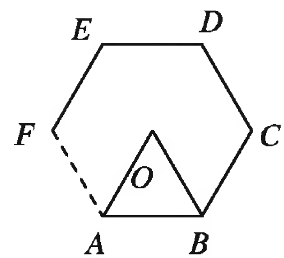
২০১৮

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 852 বর্গ সে.মি.।

সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল

সুষম বহুভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। আবার কোণগুলোও সমান। n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের কেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দুগুলো যোগ করলে n সংখ্যক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

সুতরাং বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= n\times$ একটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$ABCDEF\cdots$ একটি সুষম বহুভুজ, যার কেন্দ্র O, বাহু n সংখ্যক এবং প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a। $O,\ A;\ O,\ B$ যোগ করি।
ধরি $\triangle AOB$ এর উচ্চতা $OA = h$ এবং $\angle OAB = \theta$
সুষম বহুভুজের প্রতিটি শীর্ষে উৎপন্ন কোণের পরিমান $= 2\theta$
$\therefore$ সুষম বহুভুজের n সংখ্যক শীর্ষ কোণের সমষ্টি $= 2\theta n$

সুষম বহুভুজের কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমান $= 4$ সমকোণ

$\therefore$ কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ ও n শীর্ষ কোণের সমষ্টি $(2\theta n + 4)$ সমকোণ।

$\triangle OAB$ এর তিন কোণের সমষ্টি $= 2$ সমকোণ

$\therefore$ এরূপ n সংখ্যক ত্রিভুজের কোণের সমষ্টি $2n$ সমকোণ

$\therefore 2\theta\cdot n + 4$ সমকোণ $= 2n$ সমকোণ

বা, $2\theta\cdot n = (2n-4)$ সমকোণ

বা, $\theta = \dfrac{2n-4}{2n}$ সমকোণ

বা, $\theta = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)\times 90^\circ$

$\therefore \theta = 90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}$

এখানে, $\tan\theta = \dfrac{h}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2h}{a}$

$\therefore h = \dfrac{a}{2}\tan\theta$

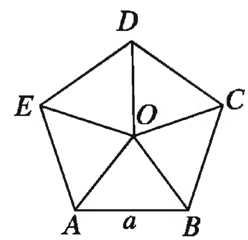
$$\begin{aligned}\triangle OAB \text{ এর ক্ষেত্রফল } &= \frac{1}{2}ah \\ &= \frac{1}{2}a \times \frac{a}{2}\tan\theta \\ &= \frac{a^2}{4}\tan\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) \\ &= \frac{a^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n} \quad [\because \tan(90^\circ - A) = \cot A]\end{aligned}$$

n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{na^2}{4}\cot\dfrac{180^\circ}{n}$

উদাহরণ ১৫. একটি সুষম পঞ্চভুজের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সুষম পঞ্চভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4$ সে.মি.। বাহুর সংখ্যা $n = 5$

আমরা জানি, সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{na^2}{4}\cot\dfrac{180^\circ}{n}$



$\therefore$ সুষম পঞ্চভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{5 \times 4^2}{4}\cot\dfrac{180^\circ}{5}$ বর্গ সে.মি.

$= 20 \times \cot 36^\circ$ বর্গ সে.মি.

$= 20 \times 1.376$ বর্গ সে.মি. (ক্যালকুলেটরের সাহায্যে)

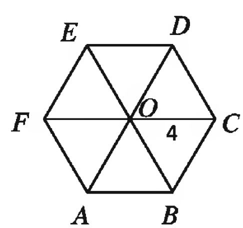
$= 27.528$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 27.528 বর্গ সে. মি. (প্রায়)

উদাহরণ ১৬. একটি সুষম ষড়ভুজের কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 4 মিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $ABCDEF$ একটি সুষম ষড়ভুজ। এর কেন্দ্র O থেকে শীর্ষবিন্দুগুলো যোগ করা হলো। ফলে 6 টি সমান ক্ষেত্রবিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

$\therefore \angle COD = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$



মনে করি কেন্দ্র থেকে শীর্ষবিন্দুগুলোর দূরত্ব a মিটার।

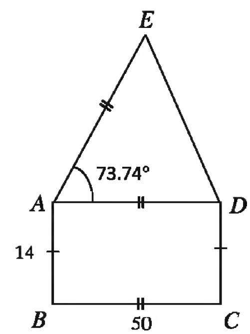
$\therefore \triangle COD$ এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a \sin 60^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2$ বর্গ মিটার$= 4\sqrt{3}$ বর্গ মিটার

সুষম ষড়ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 6 \times \triangle COD$ এর ক্ষেত্রফল

$= 6 \times 4\sqrt{3}$ বর্গ মিটার $= 24\sqrt{3}$ বর্গ মিটার

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $24\sqrt{3}$ বর্গ মিটার



উদাহরণ ১৭. প্রদত্ত চিত্রের আলোকে

ক) আয়তক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ) ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল পূর্ণসংখ্যায় নির্ণয় কর।

গ) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের গ্রহণযোগ্য পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) চিত্র অনুসারে, ক্ষেত্রটি $ABCD$ আয়তক্ষেত্র এবং ADE সমদ্বিবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত।

$ABCD$ আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{50^2 + 14^2}$ সে.মি. $= 51.92$ সে.মি. (প্রায়)

খ) আয়তক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 50 \times 14$ বর্গ সে.মি. $= 700$ বর্গ সে.মি.

ত্রিভুজক্ষেত্র ADE এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin\angle DAE = \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times \sin 73.74°$ বর্গ সে.মি. $= 24 \times 50 \times 0.960001$ বর্গ সে.মি.$= 1200$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (700 + 1200)$ বর্গ সে.মি. $= 1900$ বর্গ সে.মি.

গ) $\triangle ADE$ এ $AD = AE = 50$ সে.মি. $= a$ (ধরি), $DE = b$ (ধরি)

$\therefore$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ADE এর ক্ষেত্রফল $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = 1200$

$b\sqrt{4(50)^2 - b^2} = 4800$

বা, $b^2(10000 - b^2) = 23040000$ [বর্গ করে]

বা, $10000b^2 - b^4 = 23040000$

বা, $b^4 - 10000b^2 + 23040000 = 0$

বা, $b^4 - 6400b^2 - 3600b^2 + 2304000 = 0$

বা, $(b^2 - 6400)(b^2 - 3600) = 0$

$\therefore b^2 - 6400 = 0$ অথবা $b^2 - 3600 = 0$

বা, $b^2 = 6400$ অথবা $b^2 = 3600$

$\therefore b = 80$ অথবা $b = 60$

২০১৮

$b = 80$ হলে, $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE \cdot \sin\angle ADE = 1200$

বা, $\frac{1}{2} \times 50 \times 80 \times \sin\angle ADE = 1200$

বা, $\sin\angle ADE = 0.6$

$\therefore \angle ADE = 36.87^\circ$ (প্রায়)

$\triangle ADE$ এর তিন কোণের সমষ্টি $= 73.74^\circ + 36.87^\circ + 36.87^\circ = 147.48^\circ$

কিন্তু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $= 180^\circ$, সুতরাং $b \neq 80$

$b = 60$ হলে, $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE \cdot \sin\angle ADE = 1200$

বা, $\frac{1}{2} \times 50 \times 60 \times \sin\angle ADE = 1200$

বা, $\sin\angle ADE = 0.8$

$\therefore \angle ADE = 53.13^\circ$ (প্রায়)

$\triangle ADE$ এর তিন কোণের সমষ্টি $= 73.74^\circ + 53.13^\circ + 53.13^\circ = 180^\circ$, সুতরাং $b = 60$

$\therefore$ ত্রিভুজটির পরিসীমা $(50 + 50 + 60)$ সে.মি. $= 160$ সে.মি.

অনুশীলনী ১৬.২

১. একটি আয়তাকারক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ। এর ক্ষেত্রফল 512 বর্গমিটার হলে, পরিসীমা নির্ণয় কর।

২. একটি জমির দৈর্ঘ্য 80 মিটার এবং প্রস্থ 60 মিটার। ঐ জমির মাঝে একটি পুকুর খনন করা হলো। যদি পুকুরের প্রত্যেক পাড়ের বিস্তার 4 মিটার হয়, তবে পুকুরের পাড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৩. একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার এবং প্রস্থ 30 মিটার। বাগানের ভিতরে সমান পাড় বিশিষ্ট একটি পুকুর আছে। পুকুরের ক্ষেত্রফল বাগানের ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{2}$ অংশ হলে, পুকুরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৪. একটি বর্গাকার মাঠের বাইরে চারদিকে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল 500 বর্গমিটার হলে, মাঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল 768 বর্গমিটার। প্রতিটি 40 সে.মি. বর্গাকার পাথর দিয়ে বর্গক্ষেত্রটি বাঁধতে মোট কতটি পাথর লাগবে?

৬. একটি আয়তাকারক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 160 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 6 মিটার কম হয়, তবে ক্ষেত্রটি বর্গাকার হয়। আয়তাকারক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৭. একটি সামান্তরিকের ভূমি উচ্চতার $\frac{3}{4}$ অংশ এবং ক্ষেত্রফল 363 বর্গমিটার হলে, ক্ষেত্রটির ভূমি ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

৮. একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের সমান। সামান্তরিকের ভূমি 125 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার হলে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৯. একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 30 সে.মি. এবং 26 সে.মি.। এর ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 28 সে.মি. হলে অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১০. একটি রম্বসের পরিসীমা 180 সে.মি. এবং ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 54 সে.মি.। এর অপর কর্ণ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১১. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্যের অন্তর 8 সে.মি. এবং এদের লম্ব দূরত্ব 24 সে.মি.। যদি ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল 312 বর্গ সে.মি. হয় তবে বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১২. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 31 সে.মি. ও 11 সে.মি. এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সে.মি. ও 12 সে.মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৩. একটি সুষম অষ্টভুজের কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 1.5 মিটার হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

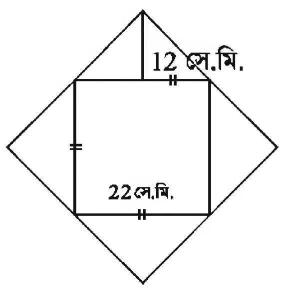
১৪. আয়তাকার একটি ফুলের বাগানের দৈর্ঘ্য 150 মিটার এবং প্রস্থ 100 মিটার। বাগানটিকে পরিচর্যা করার জন্য ঠিক মাঝ দিয়ে 3 মিটার চওড়া দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর রাস্তা আছে।

ক) উপরের তথ্যটি চিত্রের সাহায্যে সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

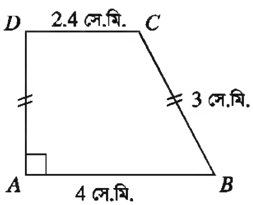
খ) রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

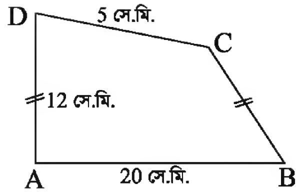
গ) রাস্তাটি পাকা করতে 25 সে.মি. দৈর্ঘ্য এবং 12.5 সে.মি. প্রস্থবিশিষ্ট কয়টি ইটের প্রয়োজন হবে?

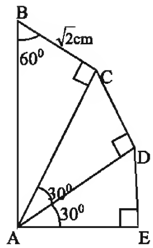
১৫. নিচের চিত্রের তথ্য থেকে বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

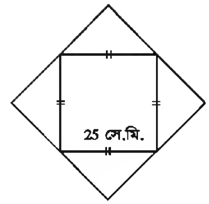


১৬. নিচের চিত্রের তথ্য থেকে বহুভুজ সমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।





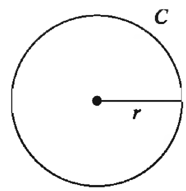




বৃত্ত সংক্রান্ত পরিমাপ

১. বৃত্তের পরিধি

বৃত্তের দৈর্ঘ্যকে তার পরিধি বলা হয়। কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে এর পরিধি $c = 2\pi r$, যেখানে $\pi = 3.14159265\cdots$ একটি অমূলদ সংখ্যা। π এর আসন্ন মান হিসেবে 3.1416 ব্যবহার করা যায়। সুতরাং কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ জানা থাকলে π এর আসন্ন মান ব্যবহার করে বৃত্তের পরিধির আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়।



উদাহরণ ১৮. একটি বৃত্তের ব্যাস 26 সে.মি. হলে, এর পরিধি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

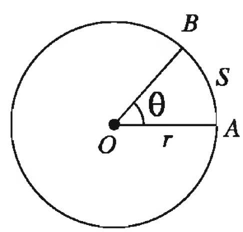
$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $= 2r$ এবং পরিধি $= 2\pi r$

প্রশ্নানুসারে, $2r = 26$ বা, $r = \dfrac{26}{2}$ বা, $r = 13$ সে.মি.

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 13$ সে.মি.$= 81.68$ সে.মি.(প্রায়)

২. বৃত্তাংশের দৈর্ঘ্য

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং $AB = s$ বৃত্তচাপ কেন্দ্রে θ° কোণ উৎপন্ন করে।
বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$
বৃত্তের কেন্দ্রে মোট উৎপন্ন কোণ $= 360^\circ$ এবং চাপ s দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের ডিগ্রি পরিমাণ θ°
আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।



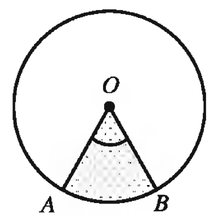
$$\therefore \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{s}{2\pi r} \text{ বা, } s = \frac{\pi r\theta}{180^\circ}$$

৩. বৃত্তক্ষেত্র ও বৃত্তকলা ক্ষেত্রফল

কোনো বৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত এলাকাকে বৃত্তক্ষেত্র বলা হয় এবং বৃত্তটিকে এরূপ বৃত্তক্ষেত্রের সীমারেখা বলা হয়।

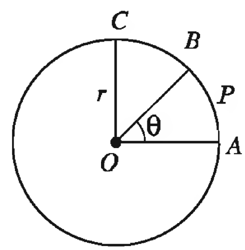
বৃত্তকলা: একটি চাপ ও চাপের প্রান্তবিন্দু সংশ্লিষ্ট ব্যাসার্ধ দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে বৃত্তকলা বলা হয়।

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির উপর A ও B দুইটি বিন্দু হলে, $\angle AOB$ এর অভ্যন্তরে OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং AB চাপের সংযোগে গঠিত একটি বৃত্তকলা।
পূর্বের শ্রেণীতে আমরা শিখে এসেছি যে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$
আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।



সুতরাং, এ পর্যায়ে আমরা স্বীকার করে নিতে পারি যে, একই বৃত্তের দুইটি বৃত্তাংশ ক্ষেত্র এবং এরা যে চাপ দুইটির উপর দন্ডায়মান এদের পরিমাপ সমানুপাতিক।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r। AOB বৃত্তকলা ক্ষেত্রটি APB চাপের উপর দন্ডায়মান, যার ডিগ্রি পরিমাপ θ। OA এর উপর OC লম্ব টানি।



$$\therefore \frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\angle AOB \text{ এর পরিমাপ}}{\angle AOC \text{ এর পরিমাপ}}$$

$$\text{বা, } \frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\theta}{90^\circ} \; [\because \angle AOC = 90^\circ]$$

$$\text{বা, বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{90^\circ} \times \text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{\theta}{90^\circ} \times \frac{1}{4} \times \text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{\theta}{90^\circ} \times \frac{1}{4} \times \pi r^2$$

$$= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$\text{সুতরাং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

উদাহরণ ১৯. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 সে.মি. এবং একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন করলে, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য এবং বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 8$ সে.মি., বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 56^\circ$

আমরা জানি, $s = \dfrac{\pi r\theta}{180^\circ} = \dfrac{3.1416 \times 8 \times 56^\circ}{180^\circ}$ সে.মি.= 7.82 সে.মি.(প্রায়) এবং

বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 = \dfrac{56}{360} \times 3.1416 \times 8^2$ বর্গ সে.মি.= 31.28 বর্গ সে.মি.(প্রায়)

উদাহরণ ২০. একটি বৃত্তের ব্যাস ও পরিধির পার্থক্য 90 সে.মি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $= 2r$ এবং পরিধি $= 2\pi r$

প্রশ্নানুসারে, $2\pi r - 2r = 90$

বা, $2r(\pi - 1) = 90$

বা, $r = \dfrac{90}{2(\pi - 1)} = \dfrac{45}{3.1416 - 1} = 21.01$ সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21.01 সে.মি. (প্রায়)

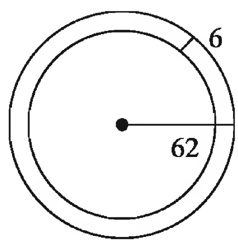
উদাহরণ ২১. একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাস মিটার 124 মিটার। মাঠের সীমানা ঘেঁষে 6 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ r এবং রাস্তাসহ বৃত্তাকার মাঠের ব্যাসার্ধ R.

$\therefore\ r = \dfrac{124}{2}$ মিটার $= 62$ মিটার এবং $R = (62 + 6)$ মিটার $= 68$ মিটার

বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ এবং রাস্তাসহ বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল $= \pi R^2$

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ মাঠের ক্ষেত্রফল - মাঠের ক্ষেত্রফল
$= (\pi R^2 - \pi r^2) = \pi(R^2 - r^2)$
$= 3.1416(68^2 - 62^2) = 3.1416(4624 - 3844)$
$= 3.1416 \times 780 = 2450.44$ বর্গমিটার (প্রায়)
নির্ণেয় রাস্তার ক্ষেত্রফল 2450.44 বর্গমিটার (প্রায়)



> **কাজ:** একটি বৃত্তের পরিধি 440 মিটার। ওই বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

উদাহরণ ২২. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 12 সে.মি. এবং বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য 14 সে.মি.। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 12$ সে.মি., বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $s = 14$ সে.মি. এবং কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের ডিগ্রি পরিমাণ θ

আমরা জানি, $s = \dfrac{\pi r\theta}{180}$

বা, $\pi r\theta = 180 \times s$

বা, $\theta = \dfrac{180 \times s}{\pi r} = \dfrac{180 \times 14}{3.1416 \times 12} = 66.84^\circ$ (প্রায়)

নির্ণেয় কোণ 66.84° (প্রায়)

উদাহরণ ২৩. একটি চাকার ব্যাস 4.5 মিটার। চাকাটি 360 মিটার পথ অতিক্রম করতে কত বার ঘুরবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, চাকার ব্যাস 4.5 মিটার।

$\therefore$ চাকাটির ব্যাসার্ধ $r = \dfrac{4.5}{2} = 2.25$ মিটার এবং পরিধি $= 2\pi r$

মনে করি, চাকাটি 360 মিটার পথ অতিক্রম করতে n বার ঘুরবে।

প্রশ্নানুসারে, $n \times 2\pi r = 360$

বা, $n = \dfrac{360}{2\pi r} = \dfrac{360}{2 \times 3.1416 \times 2.25} = 25.46$ (প্রায়)

$\therefore$ চাকাটি প্রায় 25 বার ঘুরবে।

উদাহরণ ২৪. 211 মিটার 20 সে.মি. যেতে দুইটি চাকা যথাক্রমে 32 এবং 48 বার ঘুরলো। চাকা দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তর নির্ণয় কর।

সমাধান: 211 মিটার 20 সে.মি. $= 21120$ সে.মি.

মনে করি, চাকা দুইটির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে R ও r যেখানে $R > r$

$\therefore$ চাকা দুইটির পরিধি যথাক্রমে $2\pi R$ ও $2\pi r$ এবং ব্যাসার্ধের অন্তর $(R - r)$

প্রশ্নানুসারে, $32 \times 2\pi R = 21120$

বা, $R = \dfrac{21120}{32 \times 2\pi} = \dfrac{21120}{32 \times 2 \times 3.1416} = 105.04$ সে.মি. (প্রায়)

এবং $48 \times 2\pi r = 21120$

বা, $r = \dfrac{21120}{48 \times 2\pi} = \dfrac{21120}{48 \times 2 \times 3.1416} = 70.03$ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore R - r = (105.04 - 70.03) = 35.01$ সে.মি. $= 0.35$ মি (প্রায়)

চাকা দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তর 0.35 মিটার (প্রায়)

উদাহরণ ২৫. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি.। একটি বর্গের ক্ষেত্রফল উক্ত বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান। বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 14$ সে.মি. এবং বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য a

২০১৮

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল πr^2 এবং বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= a^2$

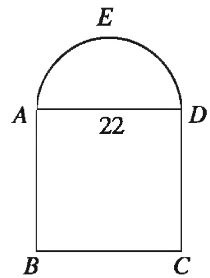
প্রশ্নানুসারে, $a^2 = \pi r^2$

বা, $a = \sqrt{\pi}r = \sqrt{3.1416} \times 14 = 24.81$ (প্রায়)

নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 24.81 সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ ২৬. চিত্রে $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 22 মিটার এবং AED ক্ষেত্রটি একটি অর্ধবৃত্ত। সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রটির প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য a



সুতরাং, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$
আবার, AED একটি অধিবৃত্ত
$\therefore$ অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \dfrac{22}{2}$ মিটার $= 11$ মিটার
সুতরাং, AED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\pi r^2$

$\therefore$ সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+$ AED অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল

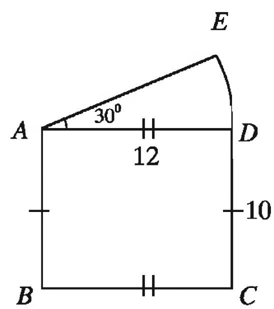
$= (a^2 + \dfrac{1}{2}\pi r^2)$

$= (22^2 + \dfrac{1}{2} \times 3.1416 \times 11^2) = 674.07$ বর্গমিটার (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 674.07 বর্গমিটার (প্রায়)

উদাহরণ ২৭. চিত্রে $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 12 মিটার ও 10 মিটার এবং DAE একটি বৃত্তাংশ। বৃত্তচাপ DE এর দৈর্ঘ্য এবং সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: বৃত্তাংশের ব্যাসার্ধ $r = AD = 12$ মিটার এবং কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 30^\circ$



$\therefore$ বৃত্তচাপ DE এর দৈর্ঘ্য $= \dfrac{\pi r\theta}{180}$
$= \dfrac{3.1416 \times 12 \times 30}{180} = 6.28$ মিটার (প্রায়)
ADE বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$
$= \dfrac{30}{360} \times 3.1416 \times 12^2 = 37.7$ বর্গমিটার (প্রায়)

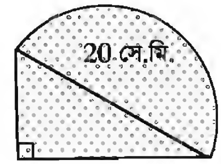
আয়তক্ষেত্র $ABCD$ এর দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 10 মিটার

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $= 12 \times 10 = 120$ বর্গমিটার

$\therefore$ সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (37.7 + 120)$ বর্গমিটার $= 157.7$ বর্গমিটার (প্রায়)

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 157.7 বর্গমিটার (প্রায়)।

কাজ: চিত্রে গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



অনুশীলনী ১৬.৩

১. একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 126 সে.মি. হলে চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২. প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া একটি মাঠ ঘুরে এলো। ঐ মাঠের ব্যাস নির্ণয় কর।

৩. একটি বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল 77 বর্গমিটার এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 মিটার। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।

৪. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি. এবং বৃত্তচাপ কেন্দ্রে 75° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫. একটি বৃত্তাকার মাঠকে ঘিরে একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ভিতরের পরিধি অপেক্ষা বাইরের পরিধি 44 মিটার বড়। রাস্তাটির প্রস্থ নির্ণয় কর।

৬. একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস 26 মিটার। পার্কটিকে বেষ্টন করে বাইরে 2 মিটার প্রশস্ত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

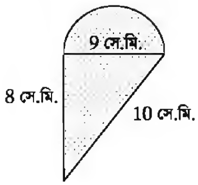
৭. একটি গাড়ীর সামনের ব্যাস 28 সে.মি. এবং পিছনের চাকার ব্যাস 35 সে.মি.। 88 মিটার পথ যেতে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা কত পূর্ণসংখ্যক বার বেশী ঘুরবে?

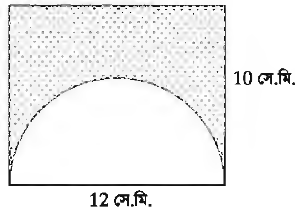
৮. একটি বৃত্তের পরিধি 220 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

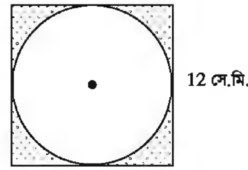
৯. একটি বৃত্তের পরিধি একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমার সমান। এদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

১০. নিচের চিত্রের তথ্য অনুযায়ী গাঢ় চিহ্নিত ক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২০১৮







ঘনবস্তু (Solids)

আয়তাকার ঘনবস্তু (Rectangular solid)

তিন জোড়া সমান্তরাল আয়তাকার সমতল বা পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে আয়তাকার ঘনবস্তু বলে।

মনে করি, $ABCDEFGH$ একটি আয়তাকার ঘনবস্তু। এর দৈর্ঘ্য $AB = a$, প্রস্থ $BC = b$, উচ্চতা $AH = c$

১. কর্ণ নির্ণয়: $ABCDEFGH$ আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণ AF।

$\triangle ABC$ এ $BC \perp AB$ এবং AC অতিভুজ।

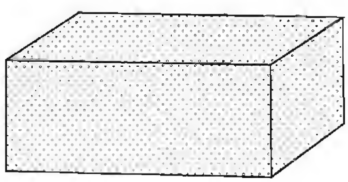
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$

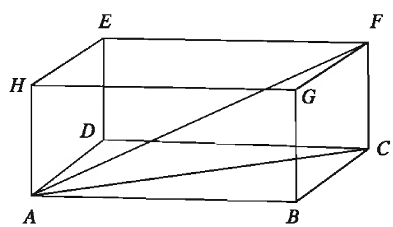
আবার, $\triangle ABC$ এ $FC \perp AC$ এবং AF অতিভুজ।

$\therefore AF^2 = AC^2 + CF^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\therefore AF = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

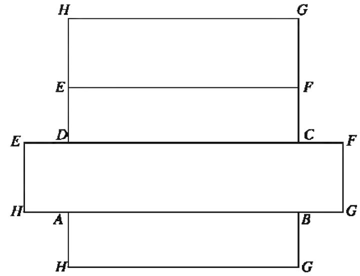
$\therefore$ আয়তাকার ঘনবস্তুরটির কর্ণ $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$


আয়তাকার ঘনবস্তু



২. সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়: আয়তাকার ঘনবস্তুটির 6 টি তল যেখানে, বিপরীত তলগুলো পরস্পর সমান।

আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল
$= 2(ABCD$ তলের ক্ষেত্রফল + $ABGH$ তলের ক্ষেত্রফল
+ $BCFG$ তলের ক্ষেত্রফল)
$= 2(AB \times AD + AB \times AH + BC \times BG)$
$= 2(ab + ac + bc) = 2(ab + bc + ca)$



৩. আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা $= abc$

উদাহরণ ২৮. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে, 25 সে.মি., 20 সে.মি. এবং 15 সে.মি.। এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল, আয়তন এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য $a = 25$ সে.মি., প্রস্থ $b = 20$ সে.মি. এবং উচ্চতা $c = 15$ সে.মি.।

$\therefore$ আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab + bc + ca)$

$= 2(25 \times 20 + 20 \times 15 + 15 \times 25) = 2350$ বর্গ সে.মি.

এবং আয়তন $= abc = 25 \times 20 \times 15 = 7500$ ঘন সে.মি.

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$= \sqrt{25^2 + 20^2 + 15^2} = \sqrt{624 + 400 + 225} = \sqrt{1250} = 35.363$ সে.মি.(প্রায়)

নির্ণেয় সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল 2350 বর্গ সে.মি., আয়তন 7500 ঘন সে.মি. এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 35.363 সে.মি. (প্রায়)।

কাজ: তোমার গণিত বইয়ের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা মেপে এর আয়তন, সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ঘনক (Cube)

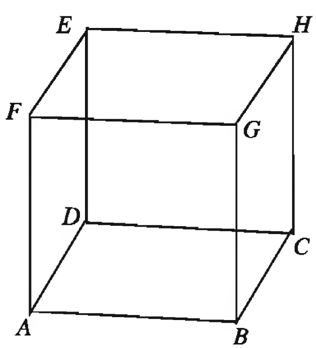
আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে একে ঘনক বলা হয়।

মনে করি, $ABCDEFGH$ একটি ঘনক। এর দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = a একক

১. ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য
$= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$

২. ঘনকের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল
$= 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) = 2(a^2 + a^2 + a^2) = 6a^2$

৩. ঘনকটির আয়তন $= a \cdot a \cdot a = a^3$



ঘনক

উদাহরণ ২৯. একটি ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 96 বর্গমিটার। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২০১৮

সমাধান: মনে করি, ঘনকটির ধার a

$\therefore$ এর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$

প্রশ্নানুসারে, $6a^2 = 96$ বা, $a^2 = 16 \therefore a = 4$

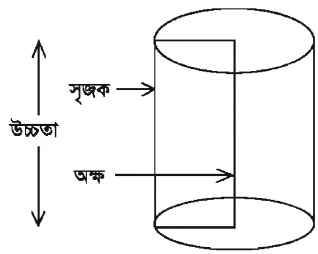
$\therefore$ ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \cdot 4 = 6.928$ মিটার (প্রায়)।

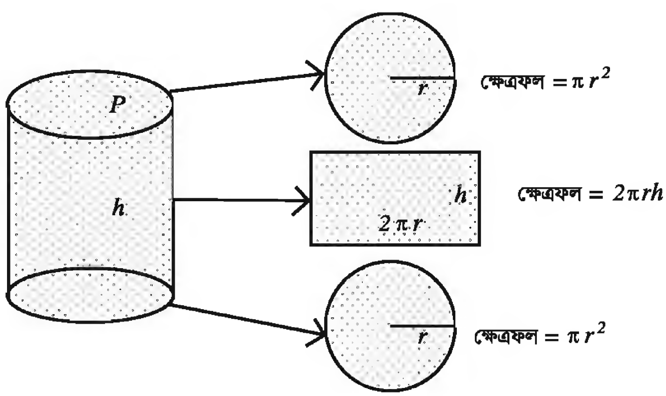
নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 6.928 মিটার (প্রায়)।

> **কাজ:** তিনটি ধাতব ঘনকের ধার যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি. এবং 5 সে.মি.। ঘনক তিনটিকে গলিয়ে একটি নতুন ঘনক তৈরি করা হলো। নতুন ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

বেলন (Cylinder)

কোনো আয়তক্ষেত্রের যে কোনো বাহুকে অক্ষ ধরে আয়তক্ষেত্রটিকে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক বেলন বা সিলিন্ডার বলা হয়। সমবৃত্তভূমিক বেলনের দুই প্রান্তকে বৃত্তাকার তল, বক্রতলকে বক্রপৃষ্ঠ এবং সমগ্রতলকে পৃষ্ঠতল বলা হয়। আয়তক্ষেত্রের অক্ষের সমান্তরাল ঘূর্ণায়মান বাহুটিকে বেলনের সৃজক বা উৎপাদক রেখা বলে।





উপরের, চিত্রটি একটি সমবৃত্তভূমিক বেলন যার ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h

১. ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

২. বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি $\times$ উচ্চতা$= 2\pi rh$

৩. সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল বা সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

বা, পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= (\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2) = 2\pi r(r+h)$

৪. আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা$= \pi r^2 h$

উদাহরণ ৩০. একটি সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা 10 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি. হলে, এর আয়তন এবং সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, সমবৃত্তভূমিক বেলনের উচ্চতা $h = 10$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r

$\therefore$ এর আয়তন $= \pi r^2 h$

$= 3.1416 \times 7^2 \times 10 = 1539.38$ ঘন সে.মি.(প্রায়)

এবং সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r+h)$

$= 2 \times 3.1416 \times 7(7+10) = 747.7$ বর্গমিটার (প্রায়)

কাজ: একটি আয়তাকার কাগজের পাতা মুড়িয়ে একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি কর। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৩১. ঢাকনাসহ একটি বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি.। বাক্সটির ভিতরের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 262 বর্গ সে. মি. এবং বাক্সের পুরুত্ব সমান।

ক) বাক্সটির আয়তন নির্ণয় কর।

খ) বাক্সটির দেওয়ালের পুরুত্ব নির্ণয় কর।

গ) বাক্সটির বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের সমান বাহুবিশিষ্ট কোনো রম্বসের একটি কর্ণ 16 সে.মি. হলে রম্বসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) বাক্সটির বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি.

$\therefore$ বাক্সটির বাইরের আয়তন $= 10 \times 9 \times 7 = 630$ ঘন সে.মি.।

খ) মনে করি, বাক্সের পুরুত্ব x. ঢাকনাসহ বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি.

$\therefore$ বাক্সের ভিতরের মাপ যথাক্রমে $a = (10-2x)$, $b = (9-2x)$

এবং $c = (7-2x)$ সে.মি.

বাক্সের ভিতরের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab+bc+ca)$

প্রশ্নানুসারে, $2(ab+bc+ca) = 262$

বা, $(10-2x)(9-2x)+(9-2x)(7-2x)+(7-2x)(10-2x) = 131$

বা, $90-38x+4x^2+63-32x+4x^2+70-34x+4x^2-131 = 0$

বা, $12x^2-104x+92 = 0$

বা, $3x^2-26x+23 = 0$

বা, $3x^2 - 3x - 23x + 23 = 0$

বা, $3x(x-1) - 23(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(3x-23) = 0$

বা, $x - 1 = 0$ অথবা $3x - 23 = 0$

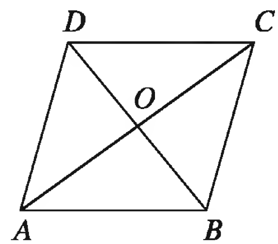
বা, $x = 1$ অথবা, $x = \dfrac{23}{3} = 7.67$ (প্রায়)

বাক্সটির পুরুত্ব তার বাইরের তিনটি পরিমাপের কোনটির চেয়েই বড় হতে পারে না।

নির্ণেয় বাক্সের পুরুত্ব 1 সে.মি.

গ) মনে করি, $ABCD$ রম্বসের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সে.মি. এবং কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



$\therefore OA = OC,\ OB = OD$

$\triangle AOB$ সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $AB = 10$

এখানে, $AB^2 = 10^2 = 100 = 36 + 64$

$= 6^2 + 8^2 = OB^2 + OA^2$ [চিত্র অনুযায়ী]

$\therefore\ OB = 6,\ OA = 8$

$\therefore$ কর্ণ $AC = 2 \times 8 = 16$ সে.মি. এবং কর্ণ $BD = 2 \times 6 = 12$ সে.মি.

$\therefore\ ABCD$ রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times AC \times BD = \dfrac{1}{2} \times 16 \times 12 = 96$ বর্গ সে.মি.

উদাহরণ ৩২. কোনো ঘনকের পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $8\sqrt{2}$ সে.মি. হলে, এর কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ঘনকের ধার a

$\therefore$ ঘনকটির পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}a$, কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3}a$ এবং আয়তন $= a^3$

প্রশ্নানুসারে, $\sqrt{2}a = 8\sqrt{2}$ বা, $a = 8$

$\therefore$ ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times 8 = 13.856$ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= 8^3 = 512$ ঘন সে.মি.।

নির্ণেয় কর্ণের দৈর্ঘ্য 13.856 সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন 512 ঘন সে.মি.।

উদাহরণ ৩৩. কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে একটি সমবৃত্তভূমিক বেলন আকৃতির ঘনবস্তু উৎপন্ন হবে, যার উচ্চতা $h = 12$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $r = 5$ সে.মি.।

উৎপন্ন ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r + h)$

$= 2 \times 3.1416 \times 5(5 + 12) = 534.071$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= \pi r^2 h$

$= 3.1416 \times 5^2 \times 12 = 942.48$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 534.071 বর্গ সে.মি. (প্রায়) এবং আয়তন 942.48 ঘন সে.মি. (প্রায়)

অনুশীলনী ১৬.৪

১. একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে.মি. এবং 5 সে.মি. হলে, এর পরিসীমার অর্ধেক কত সে.মি.?

ক) 12 খ) 20 গ) 24 ঘ) 28

২. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. হলে, এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক) $3\sqrt{3}$ খ) $4\sqrt{3}$ গ) $6\sqrt{3}$ ঘ) $9\sqrt{3}$

৩. সমতলীয় জ্যামিতিতে

(i) সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট।

(ii) সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের সমষ্টি এক সমকোণ।

(iii) ত্রিভুজের যে কোন বাহু বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিস্থ কোণ বিপরীত অন্তস্থ প্রত্যেকটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৪. বর্গক্ষেত্রে প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং কর্ণ d হলে

(i) ক্ষেত্রফল a^2 বর্গ একক

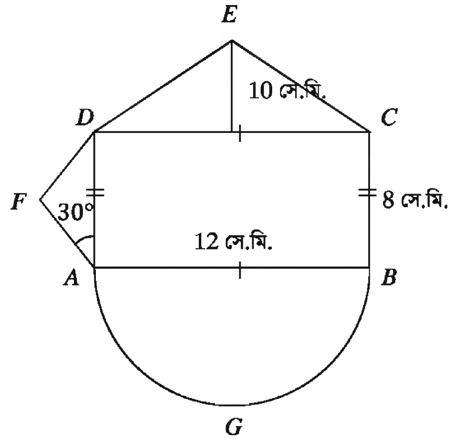
(ii) পরিসীমা $2ad$ একক

(iii) $d = \sqrt{2}a$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) *i* ও *ii* খ) *i* ও *iii* গ) *ii* ও *iii* ঘ) *i*, *ii* ও *iii*

চিত্রের তথ্য অনুসারে নিচের (৫ - ৭) প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:



৫. $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

ক) 13 খ) 14 গ) 14.4 ঘ) 15

৬. ADF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক) 16 খ) 32 গ) 64 ঘ) 128

৭. AGB অর্ধবৃত্তের পরিধি কত সে.মি.?

ক) 18 খ) 18.85 (প্রায়) গ) 37.7 (প্রায়) ঘ) 96

৮. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 16 মিটার, প্রস্থ 12 মিটার ও উচ্চতা 4.5 মিটার। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

৯. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 21 : 16 : 12 এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 87 সে.মি. হলে, ঘনবস্তুটির তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১০. একটি আয়তাকার ঘনবস্তু 48 বর্গমিটার ভূমির উপর দন্ডায়মান। এর উচ্চতা 3 মিটার এবং কর্ণ 13 মিটার। আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

১১. একটি আয়তাকার কাঠের বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 8 সে.মি., 6 সে.মি. ও 4 সে.মি.। এর ভিতরের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 88 বর্গ সে.মি.। বাক্সটির কাঠের পুরুত্ব নির্ণয় কর।

১২. একটি দেওয়ালের দৈর্ঘ্য 25 মিটার, উচ্চতা 6 মিটার এবং পুরুত্ব 30 সে.মি.। একটি ইটের দৈর্ঘ্য 10 সে.মি., প্রস্থ 5 সে.মি. এবং উচ্চতা 3 সে.মি.। দেওয়ালটি ইট দিয়ে তৈরি করতে প্রয়োজনীয় ইটের সংখ্যা নির্ণয় কর।

১৩. একটি ঘনক আকৃতির বস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 2400 বর্গ সে.মি. হলে, এর কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

১৪. 12 সে.মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সে.মি.। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১৫. একটি বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. এবং আয়তন 150 ঘন সে.মি.। বেলনের উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

১৬. একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের ক্ষেত্রফল 4400 বর্গ সে.মি.। এর উচ্চতা 30 সে.মি. হলে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৭. একটি লোহার পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাস যথাক্রমে 12 সে.মি. ও 14 সে.মি. এবং পাইপের উচ্চতা 5 মিটার। এক ঘন সে.মি. লোহার ওজন 7.2 গ্রাম হলে পাইপের লোহার ওজন নির্ণয় কর।

১৮. একটি আয়তাকারক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 5 মিটার। আয়তাকারক্ষেত্রটিকে পরিবেষ্টিত করে একটি বৃত্তাকারক্ষেত্র আছে যেখানে আয়তাকারক্ষেত্র দ্বারা অনধিকৃত অংশে ঘাস লাগানো হলো।

ক) উপরের তথ্যের ভিত্তিতে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র আঁক।

খ) বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস নির্ণয় কর।

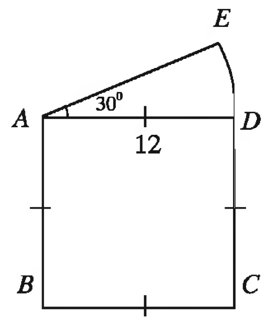
গ) প্রতি বর্গমিটার ঘাস লাগাতে 50 টাকা খরচ হলে মোট খরচ নির্ণয় কর।

১৯. চিত্রটি বর্গক্ষেত্র ও বৃত্তকলায় বিভক্ত।

ক) বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা নির্ণয় কর।

খ) সম্পূর্ণ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোনো সুষম ষড়ভুজ কোনো বৃত্তে অন্তর্লিখিত হলে বৃত্তের অনধিকৃত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



২০. একটি সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এবং একটি আয়তক্ষেত্র $BCEF$ উভয়ের ভূমি BC.

ক) একই উচ্চতা বিবেচনা করে সামান্তরিক ও আয়তক্ষেত্রটির চিত্র আঁক।

খ) দেখাও যে, $ABCD$ ক্ষেত্রটির পরিসীমা $BCEF$ ক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

গ) আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত $5 : 3$ এবং ক্ষেত্রটির পরিসীমা 48 মিটার হলে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২১. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ এবং ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার।

ক) x চলকের মাধ্যমে আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর।

খ) বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) আয়তাকারক্ষেত্রের বাইরে চতুর্দিকে 1.5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা তৈরি করতে 25×12.5 বর্গ সে.মি. তলবিশিষ্ট ইটের সংখ্যা নির্ণয় কর।